

Министерство образования Российской Федерации
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
«Лицей «Ступени»»

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

Тема: «Исследование характеристик связанных математических маятников»

Исполнители: Васильев Аникей Григорьевич,

Галина Диана Сергеевна,

Гарматюк Валерия Вячеславовна,

Золотарёва Анастасия Игоревна,

Пустынский Илья Денисович,

ученики 8 «А» класса

Руководитель: Савич Дмитрий Евгеньевич,

учитель физики

Хабаровск

2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1 Теоретическая часть.....	4
1.1 Колебания и их основные характеристики.....	4
1.2 Математический маятник как гармонический осциллятор	5
1.3 Связанные математические маятники как система осцилляторов	7
2 Практическая часть	10
2.1 Описание лабораторной установки.....	10
2.2 Исследование одномодового режима колебаний	11
2.3 Исследование двухмодового режима колебаний.....	13
2.4 Экспериментальное определение ускорения свободного падения.....	15
Заключение	18
Список использованных источников и литературы	19

ВВЕДЕНИЕ

Изучение физических закономерностей в современной образовательной системе стимулирует их нахождение и применение на практике в окружающей нас действительности. Данное обстоятельство касается всех разделов школьного курса физики: от механики до геометрической и волновой оптики. Однако, зачастую незначительное внимание уделяется практической стороне вопроса применения того или иного физического явления или закона, связь которого с прикладными науками может быть колоссальной.

Например, школьный курс физики не позволяет полностью охватить раздел теории колебаний и волн, который объединяет в себе множество понятий из теории распространения электромагнитных и механических волн или описать эллиптическое движение Земли вокруг Солнца при помощи эмпирически выведенных и математически подтверждённых Т. Браге законов И. Кеплера.

Простейшей моделью для рассмотрения распространяющихся в среде колебаний может послужить математический маятник, представляющий собой груз, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити. Несмотря на кажущуюся техническую простоту, на его основе можно проводить эксперименты по определению ускорения свободного падения для Земли, а также для подтверждения правильности решений дифференциальных уравнений второго порядка, упрощённых в школьном курсе до квадратных и линейных уравнений с одной неизвестной величиной.

В данной работе рассмотрены связанные математические маятники, на основе которых были изучены одномодовый и двухмодовый режимы колебаний, указаны их отличия друг от друга, а также построены графики зависимости периодов колебаний нижней и верхней мод от длины линии связи. Помимо этого, с их помощью было экспериментально вычислено ускорение свободного падения для планеты Земля и проведено сравнение полученного значения с общеизвестным и приблизительно равным $9,8 \text{ м/с}^2$.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Колебания и их основные характеристики

Под *колебаниями* понимаются движения или процессы, обладающие той или иной повторяемостью во времени. Как уже было сказано ранее, колебания наблюдаются повсеместно как в природе (смена дня и ночи и времён года из-за вращения Земли вокруг собственной оси и Солнца, ритм сердечной мышцы), так и в технике (маятник в часах, качели).

Положение или состояние какой-либо колеблющей системы определяется совокупностью координат (параметров системы), характерной для каждой системы: давлением, силой тока, расстоянием, температурой, скоростью и т.д. Например, в случае исследования зависимости расстояния x , м от времени t , с функциональная зависимость будет записываться как $x(t)$.

Колебания называются *свободными*, если они совершаются за счёт первоначально сообщённой энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на систему. Если же колебания совершаются в том числе и за счёт внешней периодически изменяющейся силы (то есть энергия сообщается во время совершения колебаний), то они называются *вынужденными*.

При проведении данной работы связанные математические маятники исследовались только в режиме свободных колебаний.

Колебание называется периодическим, если существует такое время T , с, для которого выполняется условие $x(t) = x(t + nT)$ для любого целого числа n . Время T , через которое колебание повторяется называется *периодом колебания*. Величина, обратная периоду колебаний и показывающая число колебаний в единицу времени, называется частотой колебаний ν , Гц. Частота колебаний вычисляется по формуле

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.1)$$

Для определения периода и частоты колебаний необходимо определить число колебаний N за время t , что выражается следующей формулой:

$$T = \frac{t}{N}. \quad (1.2)$$

Разность между максимальным A_{max} и минимальным A_{min} значениями обобщённой координаты называется *размахом колебаний*, а половина размаха называется *амплитудой колебаний* A :

$$A = \frac{A_{max} - A_{min}}{2}. \quad (1.3)$$

Под амплитудой колебаний также понимают *наибольшее отклонение колебательной системы от положения равновесия*.

В случае колебательного движения также вводится величина ω , рад/с, называемая *угловой (циклической) частотой* и численно равная углу, на которое повернётся колеблющееся тело за единицу времени. Данная величина имеет непосредственную связь с упомянутым выше периодом и частотой колебаний [1, 3, 4]:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (1.4)$$

1.2 Математический маятник как гармонический осциллятор

Под *осциллятором* понимается система, совершающая колебания. Простейшие случаи колебаний в реальном мире можно описать при помощи *гармонического осциллятора*, то есть осциллятора, совершающего *гармонические колебания*, в которых координата тела изменяется согласно закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.5)$$

где $x(t)$ – функция координаты тела, зависящая от времени t , м;

A – амплитуда (отклонение от нижней точки маятника), м;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота, рад/с (T – период колебаний, с);

φ_0 – начальная фаза, определяющая положение колеблющегося тела в начальный момент времени, рад.

Представленные в (1.5) характеристики лучше всего описать графическим путём для наглядности (см. рисунок 1.1).

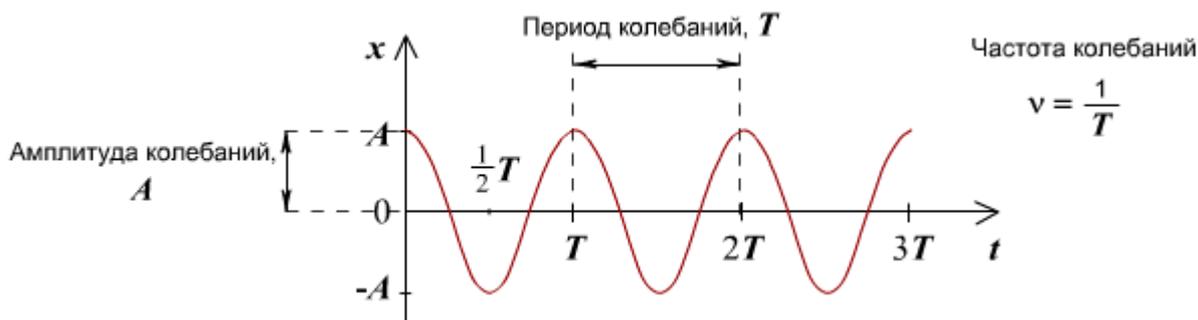


Рисунок 1.1 – Гармонические колебания на примере функции $x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

В введении было упомянуто, что *математический маятник является моделью груза, подвешенного на невесомой нерастяжимой нити*. Это означает, что математического маятника в реальном мире *не существует*, поскольку модель не учитывает сопротивления воздуха и удлинение нити, на которой подвешен груз.

Внешний вид математического маятника представлен на рисунке 1.2.

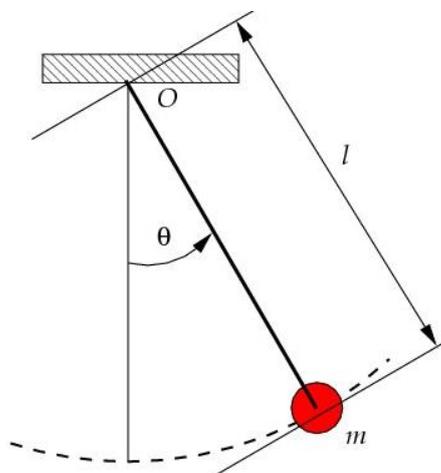


Рисунок 1.2 – Внешний вид математического маятника: O – точка крепления маятника к потолку; l – длина нити, м; θ – угол отклонения от положения равновесия, рад; m – масса груза, кг

Период колебаний математического маятника T , частично упомянутый в формулах (1.1), (1.2), (1.4) и (1.5) определяется по следующей формуле, выведенной из однородного дифференциального уравнения второго порядка, сводящееся к привычному квадратному уравнению вида $ax^2 + bx + c = 0$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.6)$$

где l – длина нити, м;

g – ускорение свободного падения на Земле, равное $9,8 \text{ м/с}^2$.

Из всего вышесказанного следует, что математический маятник является приближением реально существующих колебательных систем, на которые воздействуют силы деформации нити и груза, а также сопротивления воздуха [2, 4]. На одной из подобных систем проводилась практическая часть работы, представленная ниже в разделах [2.2] – [2.4].

1.3 Связанные математические маятники как система осцилляторов

Для того, чтобы в осцилляторе возникли колебания, его нужно каким-либо образом присоединить к системе, где эти колебания уже совершаются. Такой системой может являться другой такой же осциллятор, а связь может быть механической (как в математическом маятнике) или осуществляться через какое-либо силовое поле (колебательные контуры, имеющие общую катушку индуктивности).

Под *связанными математическими маятниками* понимается система осцилляторов, имеющая *общую линию связи* длиной $l_{\text{св}}$, благодаря которой колебания могут непосредственно передаваться от одного осциллятора к другому (см. рисунок 1.3).

Математический аппарат, используемый для вывода используемых в работе формул, достаточно сложен для детей, изучающих физику в 8 классе, а потому будет упомянут лишь с практической стороны.

Стоит отметить, что связанные математические маятники могут колебаться в двух режимах: *одномодовый* и *двухмодовый*, принципиальные различия которых раскрыты ниже.

Понятие «мода» в случае теории колебаний и волн означает решение

дифференциального уравнения (говоря проще, одно колебание, описываемое в самом простом случае функцией синуса или косинуса). Соответственно, одномодовый режим подразумевает одновременное распространение только одной моды (верхней или нижней); двухмодовый – двух (колебания представляют собой так называемые «биения»).

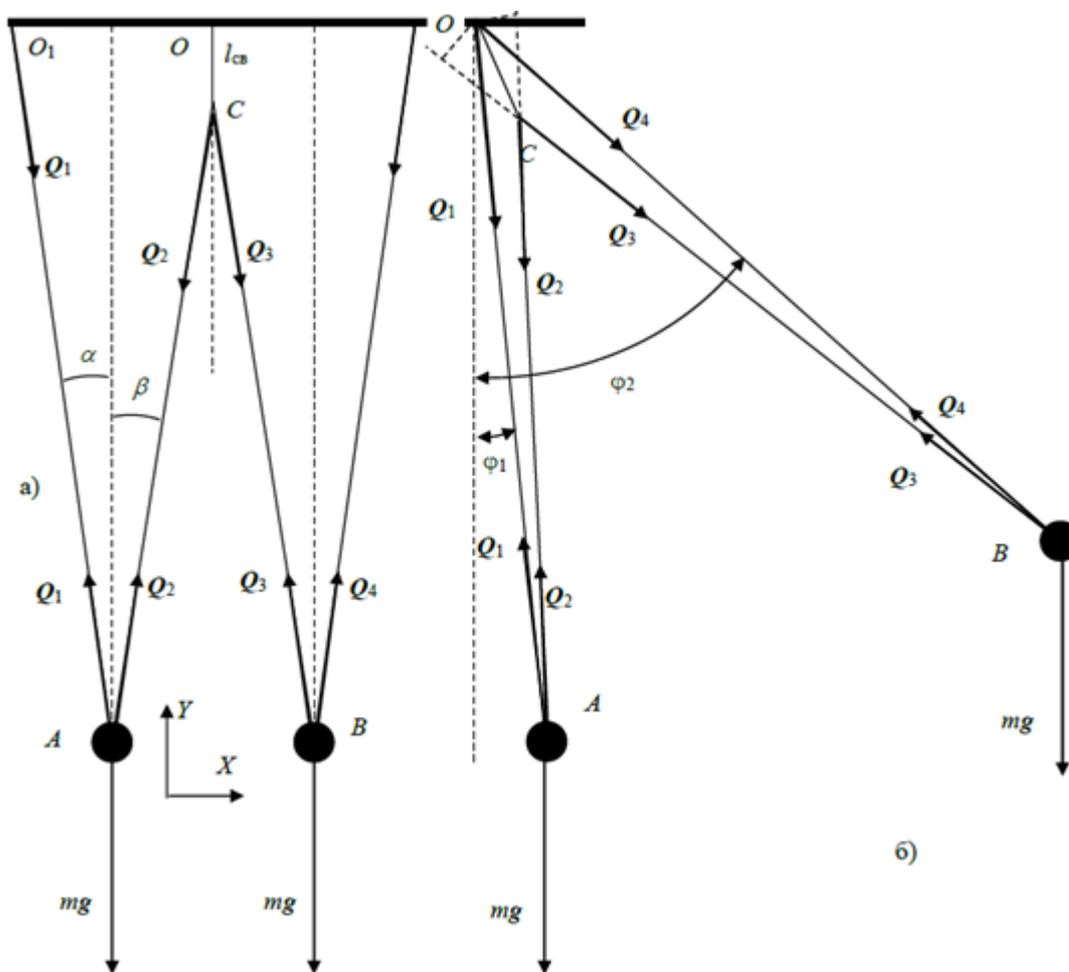


Рисунок 1.3 – Связанные математические маятники: а) направление колебаний перпендикулярно плоскости рисунка; б) направлений колебаний в плоскости рисунка

Чтобы в связанном осцилляторе получить состояние, именуемое *нижней модой* необходимо и достаточно отклонить оба маятника в одну сторону на одинаковый угол и отпустить. Понятие «нижняя» подразумевает меньшее значение циклической частоты ω_n среди двух одномодовых режимов. Период колебаний математического маятника T_n находится в данном случае аналогично формуле (1.6):

$$T_H = \frac{2\pi}{\omega_H} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad \omega_H = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.7)$$

Чтобы в связанном осцилляторе получить состояние, именуемое *верхней модой* необходимо и достаточно отклонить оба маятника в противоположные стороны на одинаковый угол и отпустить. Понятие «верхняя» подразумевает большее значение циклической частоты ω_B среди двух одномодовых режимов. Период колебаний математического маятника T_B находится в данном случае по формуле:

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = 2\pi \sqrt{\frac{2l(l - l_{CB})}{g(2l - l_{CB})}}; \quad \omega_B = \sqrt{\frac{g(2l - l_{CB})}{2l(l - l_{CB})}}. \quad (1.8)$$

Стоит отметить, что в *одномодовом режиме энергия от одного маятника к другому не переходит*.

Чтобы в связанном осцилляторе получить *двухмодовый режим*, необходимо и достаточно отклонить только один маятник (второй находится в нижней точке – положении равновесия). В данном случае мы будем иметь два периода – низкочастотных колебаний $T_{HЧ}$ и высокочастотных колебаний $T_{BЧ}$ (см. рисунок 1.4), которые можно вычислить, руководствуясь следующими формулами [3]:

$$T_{HЧ} = \frac{4\pi}{\omega_B - \omega_H}; \quad T_{BЧ} = \frac{4\pi}{\omega_B + \omega_H}. \quad (1.9)$$

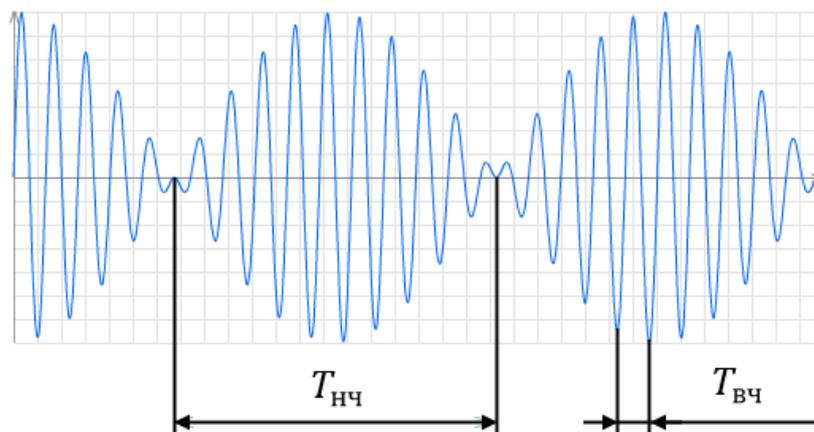


Рисунок 1.4 – Наглядное представление низко- и высокочастотных периодов на графике биений

2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1 Описание лабораторной установки

Лабораторная установка представляет собой два штатива на специальных подставках, сцепленных между собой деревянной балкой. Балка снабжена крепёжными механизмами для размещения нитей, на которых подвешены абсолютно идентичные грузы. Между второй и третьей нитями слева имеется соединитель чёрного цвета, который можно передвигать вверх-вниз для изменения длины линии связи $l_{св}$ (см. рисунок 2.1), что использовалось для построения графических зависимостей.

За предоставление лабораторного оборудования и площади для проведения эксперимента выражаем благодарность руководству и преподавателям кафедры «Автоматика, телемеханика и связь» Дальневосточного государственного университета путей сообщения.



Рисунок 2.1 – Внешний вид лабораторной установки

2.2 Исследование одномодового режима колебаний

Начало исследовательской работы сводилось к ознакомлению с лабораторной установкой и определению длины нити l от крепёжного механизма на деревянной балке до груза при помощи линейки.

Измерения показали, что длина нити $l = 0,92$ м.

Для измерения экспериментальных значений периодов нижней моды $T_{нэ}$ в зависимости от изменений длины линии связи $l_{св}$ маятники были отклонены в одну сторону на одинаковый угол, после чего при помощи секундомера было определено время $t_{нэ}$ для $N = 30$ колебаний.

Результаты измерений занесены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – Определение периода колебаний нижней моды $T_{нэ}$

Длина линии связи $l_{св}$, м	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14
Время колебаний $t_{нэ}$, с	58,86	58,69	58,54	58,61	58,41	58,56	58,51
Число колебаний N	30	30	30	30	30	30	30

Полученные результаты можно использовать для вычисления $T_{нэ}$ при помощи формулы (1.2) и занесения результатов во второй столбец таблицы 2.5.

Сравнить экспериментальные значения с теоретическими можно, посчитав $T_{нэ}$ при помощи формулы (1.7), подставив известное значение длины нити l и ускорения свободного падения g . Значения $T_{нэ}$ заносятся в четвёртый столбец таблицы 2.5.

Параллельно этому по формуле (1.7) вычисляются значения циклической частоты нижней моды $\omega_{нэ}$, которые заносятся во второй столбец продолжения таблицы 2.5.

Для измерения экспериментальных значений периодов верхней моды $T_{вэ}$ в зависимости от изменений длины линии связи $l_{св}$ маятники были отклонены в разные стороны на одинаковый угол, после чего при помощи секундомера было определено время $t_{вэ}$ для $N = 30$ колебаний.

Результаты измерений занесены в таблицу 2.2.

Таблица 2.2 – Определение периода колебаний верхней моды $T_{вэ}$

Длина линии связи $l_{св}$, м	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14
Время колебаний $t_{вэ}$, с	58,67	58,22	57,71	57,44	57,08	56,73	56,32
Число колебаний N	30	30	30	30	30	30	30

Полученные результаты можно использовать для вычисления $T_{вэ}$ при помощи формулы (1.2) и занесения результатов во третий столбец таблицы 2.5.

Сравнить экспериментальные значения с теоретическими можно, посчитав $T_{в}$ при помощи формулы (1.8), подставив известное значение длин нити l и линии связи $l_{св}$, а также ускорения свободного падения g . Значения $T_{в}$ заносятся в пятый столбец таблицы 2.5.

Параллельно этому по формуле (1.8) вычисляются значения циклической частоты верхней моды $\omega_{н}$, которые заносятся во третий столбец продолжения таблицы 2.5.

Разницу между теоретическими и практическими значениями периодов верхней и нижней мод также можно продемонстрировать графически (см. рисунки 2.2 и 2.3).

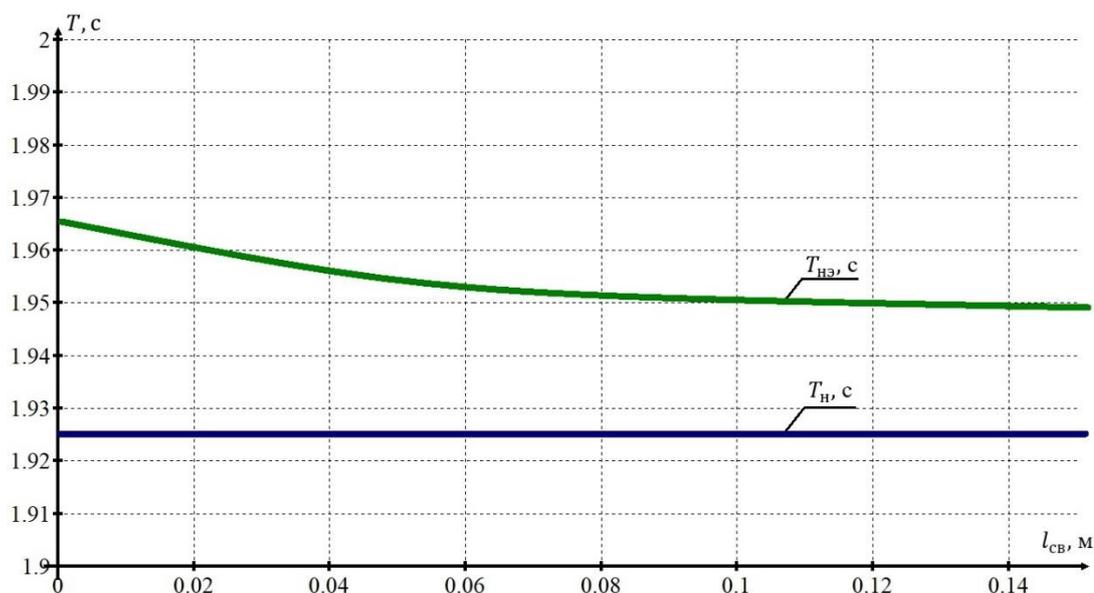


Рисунок 2.2 – Графики зависимости теоретического и экспериментального периодов нижней моды от длины линии связи

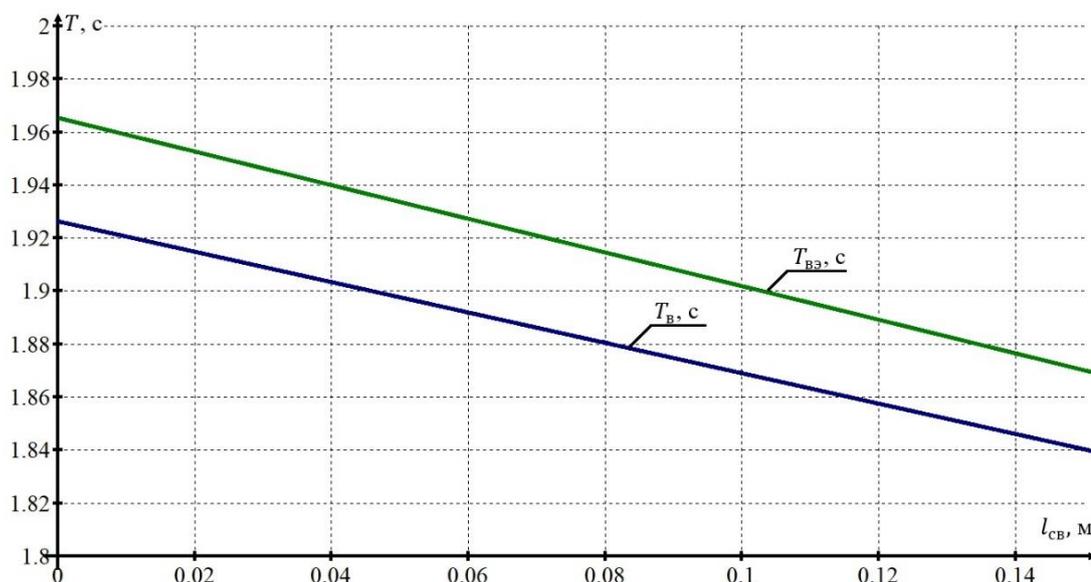


Рисунок 2.3 – Графики зависимости теоретического и экспериментального периодов верхней моды от длины линии связи

2.3 Исследование двухмодового режима колебаний

Для измерения экспериментальных значений периодов первого T_1 и второго T_2 маятников в двухмодовом режиме колебаний в зависимости от изменений длины линии связи l_{CB} первый маятник был отклонён на небольшой угол в сторону при неподвижном втором, после чего при помощи секундомера одновременно определялось время t_1 и t_2 для $N = 30$ колебаний.

Результаты измерений занесены в таблицы 2.3 и 2.4.

Таблица 2.3 – Определение периода колебаний первого маятника T_1

Длина линии связи $l_{CB}, \text{ м}$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14
Время колебаний $t_1, \text{ с}$	58,07	57,87	57,67	57,07	57,00	56,47	55,81
Число колебаний N	30	30	30	30	30	30	30

Таблица 2.4 – Определение периода колебаний второго маятника T_2

Длина линии связи $l_{CB}, \text{ м}$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14
Время колебаний $t_2, \text{ с}$	58,08	57,57	57,52	57,16	56,89	56,78	56,00
Число колебаний N	30	30	30	30	30	30	30

Полученные результаты можно использовать для вычисления T_1 и T_2 при помощи формулы (1.2) и занесения результатов в шестой и седьмой столбцы таблицы 2.5 соответственно.

Сравнить экспериментальные значения с теоретическими можно, посчитав $T_{вч}$ при помощи формулы (1.9), подставив известные значения циклических частот верхней $\omega_в$ и нижней мод $\omega_н$. Значения $T_{вч}$ заносятся в десятый столбец таблицы 2.5.

Экспериментальные значения низкочастотного периода колебаний $T_{нчэ}$ были получены при помощи секундомера. Данная величина определяется как промежуток времени, за который один из маятников в двухмодовом режиме, начиная своё движение из положения равновесия, дважды достигает максимального и минимального (нулевого) значения амплитуды.

Сравнить экспериментальные значения с теоретическими можно, посчитав $T_{нч}$ при помощи формулы (1.9), подставив известные значения циклических частот верхней $\omega_в$ и нижней мод $\omega_н$. Значения $T_{нч}$ заносятся в девятый столбец таблицы 2.5.

Результаты экспериментов показывают сравнительно низкую погрешность при их проведении, что подтверждает правильность их проведения.

Таблица 2.5 – Исследование режимов колебаний связанных маятников

Эксперимент №1			Теория №1		Эксперимент №2			Теория №2	
$l_{св}, м$	$T_{нэ}, с$	$T_{вэ}, с$	$T_н, с$	$T_в, с$	$T_1, с$	$T_2, с$	$T_{нчэ}, с$	$T_{вч}, с$	$T_{нч}, с$
0,02	1,962	1,956	1,925	1,915	1,936	1,936	690,47	694,97	1,920
0,04	1,956	1,941	1,925	1,904	1,929	1,919	341,19	340,74	1,914
0,06	1,951	1,924	1,925	1,892	1,922	1,917	219,43	222,66	1,909
0,08	1,954	1,915	1,925	1,881	1,902	1,905	160,32	163,61	1,903
0,10	1,947	1,903	1,925	1,869	1,900	1,896	125,11	128,19	1,897
0,12	1,952	1,891	1,925	1,857	1,882	1,893	102,79	104,56	1,890
0,14	1,950	1,877	1,925	1,844	1,860	1,867	85,54	87,69	1,884

Длина линии связи $l_{\text{св}}$, м	Циклическая частота нижней моды $\omega_{\text{н}}$, рад/с	Циклическая частота верхней моды $\omega_{\text{в}}$, рад/с
0,02	3,264	3,282
0,04	3,264	3,301
0,06	3,264	3,320
0,08	3,264	3,341
0,10	3,264	3,362
0,12	3,264	3,384
0,14	3,264	3,407

2.4 Экспериментальное определение ускорения свободного падения

Определение ускорения свободного падения осуществляется по следующим ниже формулам при помощи связанных маятников, колеблющихся в режиме нижней моды. Для начала проведения эксперимента потребовалось измерить длину нити l' и диаметр груза d при помощи линейки, после чего определить длину всего маятника:

$$l = l' + \frac{d}{2}. \quad (2.1)$$

Результаты расчётов длины маятника l занесены в таблицу 2.6.

Таблица 2.6 – Определение длины маятника l

№	Длина нити l' , м	Диаметр груза d , м	Длина маятника l , м
1	0,920	0,033	0,937
2	0,810		0,827
3	0,750		0,767
4	0,640		0,657
5	0,520		0,537

Нахождение экспериментального периода колебаний T_3 сходно с методикой нахождения периода колебаний нижней моды $T_{\text{нз}}$, использованной в

разделе [2.2] при числе колебаний N , равном 20, 25 и 30 по формуле (1.2).

Результаты расчётов экспериментального периода колебаний $T_э$ занесены в таблицу 2.7. Периоды колебаний $T_э$ записаны в таблицу 2.8 слева направо для $N = 20, 25$ и 30 соответственно (третий – пятый столбцы).

Таблица 2.7 – Определение экспериментального периода колебаний T

№	Длина маятника l , м	Время колебаний t			Число колебаний N		
1	0,937	39,02	48,76	58,64	20	25	30
2	0,827	36,67	46,03	54,88	20	25	30
3	0,767	35,02	43,84	53,08	20	25	30
4	0,657	32,83	40,90	48,91	20	25	30
5	0,537	29,87	37,01	44,21	20	25	30

Средний период колебаний T_{cp} определяется как среднее арифметическое для каждой длины маятника l :

$$T_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n T_{эi}}{n} = \frac{T_{э1} + T_{э2} + T_{э3}}{3}. \quad (2.2)$$

Результаты расчётов среднего периода колебаний T_{cp} занесены в шестой столбец таблицы 2.8.

Экспериментальные значения ускорений свободного падения $g_э$ определяются при помощи формулы, выведенной из (1.6):

$$g_э = \frac{4\pi^2 l}{T_{cp}^2}. \quad (2.3)$$

Результаты расчётов экспериментальных значений ускорений свободного падения $g_э$ занесены в седьмой столбец таблицы 2.8.

Среднее ускорение свободного падения g_{cp} определяется как среднее арифметическое для каждой длины маятника l :

$$g_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n g_{эi}}{n} = \frac{g_{э1} + g_{э2} + g_{э3} + g_{э4} + g_{э5}}{5}. \quad (2.4)$$

Результаты расчётов среднего периода колебаний g_{cp} занесены в восьмой

столбец таблицы 2.8.

Теоретический период колебаний маятника $T_{\text{теор}}$ определяется по формуле (1.6) для каждой длины маятника l при известном теоретическом значении ускорения свободного падения $g_{\text{теор}}$, равном $9,8 \text{ м/с}^2$:

Результаты расчётов теоретического периода колебаний $T_{\text{теор}}$ занесены в девятый столбец таблицы 2.8.

Таблица 2.8 – Определение ускорения свободного падения

№	$l, \text{ м}$	$T_3, \text{ с}$			$T_{\text{ср}}, \text{ с}$	$g_3, \text{ м/с}^2$	$g_{\text{ср}}, \text{ м/с}^2$	$T_{\text{теор}}, \text{ с}$
1	0,937	1,951	1,950	1,955	1,952	9,703	9,702	1,942
2	0,827	1,833	1,841	1,829	1,835	9,694		1,825
3	0,767	1,751	1,754	1,769	1,758	9,791		1,757
4	0,657	1,642	1,636	1,630	1,636	9,684		1,626
5	0,537	1,494	1,480	1,474	1,483	9,637		1,470

Сравнение полученных опытным путём и теоретических значений ускорений свободного падения, а также периодов колебаний маятника показало незначительную разницу между ними (относительная погрешность колеблется в районе 1%), что подтверждает достоверность проведённого эксперимента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первоначально кажущаяся с точки зрения конструкции простота математического маятника обманчива с самого начала, поскольку подробное изучение его характеристик предполагает начальные знания о тригонометрических функциях, таких как синус и косинус, с помощью которых становится возможным объяснение понятий «амплитуда», «частота» и «начальная фаза».

Проведённые эксперименты показали слабую зависимость периода колебаний нижней моды и обратно пропорциональную зависимость периода колебаний верхней моды от длины линии связи, что подтверждается теоретическими формулами, полученными из соответствующих однородных дифференциальных уравнений, а также построенных графических зависимостей.

Из этих же зависимостей следует относительно малая расхожимость экспериментальных и теоретических данных, поскольку линии находятся близко друг относительно друга, что объясняется наличием случайных и систематических погрешностей, а также силы сопротивления воздуха при проведении опытов.

Полученное в ходе эксперимента значение относительной погрешности позволяет судить о правильности проведения лабораторных испытаний, а также признать возможность определения ускорения свободного падения на Земле при помощи связанных математических маятников, колеблющихся в режиме нижней моды.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никеров, В. А. Физика. Современный курс: Учебник / В. А. Никеров. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2012. – 452 с.
2. Пёрышкин, А. В. Физика. 9 кл.: учебник / А. В. Пёрышкин, Е.М. Гутник. – М.: Дрофа, 2014. – 319 с.: ил.
3. Прокопович, М. Р. Теория колебаний: учеб. пособие / М. Р. Прокопович – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2013. – 160 с.: ил.
4. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова – 11-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 560 с.